

# Phillips 模式的斜压不稳定的非线性饱和问题 ——位涡拟能情形\*

项 杰

林乃实

南京大学大气科学系中尺度灾害性天气教育部重点实验室, 南京 210093; 南京市江宁区气象局, 南京 211101

**摘要** 利用对应于 Arnol'd 第二稳定性定理的非线性稳定性判据, 研究了 Phillips 模式的斜压不稳定的非线性饱和问题. 通过选择合适的人工稳定基流, 得到了扰动的波动部分位涡拟能的解析或数值的上界估计, 深化了 Shepherd 的利用 Arnol'd 第一稳定性定理的结果. 分析表明, 解析上界估计提供了一个关于扰动的波动部分的有效约束, 同时讨论了边界稳定曲线附近饱和上界估计的性质.

**关键词** Phillips 模式 斜压不稳定 非线性饱和 饱和上界估计

大气运动的不稳定的饱和(saturation)问题是一个有意义的问题. 所谓饱和问题, 是指在基流不稳定时, 如何估计扰动的能量与位涡拟能等的最优(最小)的增长的上界. 自从 Shepherd<sup>[1,2]</sup>提出了研究正压和斜压不稳定的非线性饱和问题的方法之后, 许多学者在这方面做了进一步的研究工作<sup>[3,4]</sup>. 同时, Zeng<sup>[5]</sup>用不同的方法研究了线性和非线性 Haurwitz 波的饱和问题. 然而, 上面这些工作都是利用对应于 Arnol'd 第一稳定性定理的判据讨论的. 近年来, Mu 等<sup>[6~8]</sup>对大气和海洋动力学中的一些重要模式建立了对应于 Arnol'd 第二稳定性定理的非线性稳定性判据. 毫无疑问, 在讨论不稳定的饱和问题时, 如果同时考虑对应于 Arnol'd 第一和第二定理的判据, 将会得到更优的结果. Paret 等<sup>[9]</sup>同时利用对应于 Arnol'd 第一和第二定理的判据, 用数值方法研究了三层 Phillips 模式的斜压不稳定的非线性饱和问题. Xiang 等<sup>[10]</sup>也同时利用对应于 Arnol'd 第一和第二定理的判据研究了平行切变流的不稳定的非线性饱和问题. 上述 Shepherd 的工作<sup>[1]</sup>利用了对应于 Arnol'd 第一定理的稳定性判据讨论了经典的 Phillips 模式(即两层 Phillips 模式, 以下按正常习惯称为 Phillips 模式)的斜压不稳定的非线性饱和问题. 由于 Phillips 模式的对应于

Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据包含了对应于 Arnol'd 第一定理的非线性稳定性判据<sup>[8]</sup>, 因此, 利用前者讨论饱和问题, 结果会更精确. 但由于 Phillips 模式的对应于 Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据的复杂性, 至今还没有以解析或解析为主的方法研究 Phillips 模式斜压不稳定的非线性饱和问题的工作. 本文的目的就是要研究这个问题.

## 1 两层准地转模式的有关结果

为了后面讨论的方便, 这里对两层准地转模式的对应于 Arnol'd 第二稳定性定理的稳定性判据作一简要概括.

$\beta$  平面上两层准地转流体的运动可用准地转位涡守恒方程来描述,

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \partial(\Phi_i, P_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

这里,

$$P_i = \nabla^2 \Phi_i + (-1)^{i+1} F_i(\Phi_2 - \Phi_1) + \beta y$$

是第  $i$  层的位涡,  $\Phi_i$  是第  $i$  层的流函数,  $\partial(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ , 其他量具有通常的意义. 流体的水

2002-05-27 收稿, 2002-07-15 收修改稿

\* 国家自然科学基金(批准号: 49455007, 40075011)和中国博士后科学基金资助项目

E-mail: xjie@nju.edu.cn

平运动区域  $\Omega$  是周期通道:  $-\pi < x < \pi, 0 < y < l$ , 边界条件为

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \Big|_{y=0,l} = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \Big|_{y=0,l} dx = 0. \quad (2)$$

设  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$  是(1), (2)式的定常解, 这里  $\Psi_i(y), Q_i(y)$  分别是流函数和位涡. 假设存在常数  $\alpha$  和函数  $\Psi_i^*(\cdot)$ , 使得

$$\Psi_i(y) + \alpha y = \Psi_i^*(Q_i). \quad (3)$$

定义扰动  $(\psi_i, q_i)$ :

$$\Phi_i = \Psi_i + \psi_i, P_i = Q_i + q_i,$$

其中  $q_i = \nabla^2 \psi_i + (-1)^{i+1} F_i (\psi_2 - \psi_1)$  为扰动位涡.

假设存在正常数  $C_{1i}, C_{2i}$ , 使得

$$0 < C_{1i} \leq -\frac{d\Psi_i^*}{dQ_i} \leq C_{2i} < \infty. \quad (4)$$

分解  $(\psi_i, q_i)$  为两部分:  $\psi_i = \psi_i^* + \psi_i', q_i = q_i^* + q_i'$ . 其中带“\*”的量只与初始扰动有关, 且可计算出来, 而带“'”的量为剩余部分 (参见 Mu 等<sup>[11]</sup>附录). 定义

$$Z_i'(t) = \int_{\Omega} \frac{d_i}{2} q_i'^2 dx dy, \quad Z'(t) = Z_1'(t) + Z_2'(t),$$

$$E^* = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [d_1 |\nabla \psi_1^*|^2 + d_2 |\nabla \psi_2^*|^2 + d_1 F_1 (\psi_2^* - \psi_1^*)^2] dx dy,$$

$$H = E^* - E(0) - A(0) - \sum_{i=1}^2 C_{1i} Z_i^*,$$

$$K = \text{diag}(\sqrt{F_1}, \sqrt{F_2}), \quad C = \text{diag}(C_{11}, C_{12}),$$

$$M = C - (\lambda I - KTK)^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

这里,  $d_i$  是垂直高度, 扰动能量  $E(t)$  的表达式与  $E^*$  相同, 但以  $\psi_i$  代替  $\psi_i^*$ ;  $Z_i^*$  是  $\psi_i^*$  对应的位涡拟能,  $\lambda = (\pi/l)^2$ ,  $A(t)$  的表达式见文献[8]. 那么, 非线性稳定性判据是

**判据** 如果基流  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$  满足(3)和(4)式, 矩阵  $M$  正定, 那么  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$  非线性

稳定, 且关于  $\psi_i'$  的位涡拟能  $Z'(t)$  有如下的上界估计

$$Z'(t) \leq \frac{[(E^*)^{1/2} + (E^* + \lambda k_1 H)^{1/2}]^2}{\lambda k_1^2}, \quad (5)$$

这里  $k_1$  是  $M$  的最小正特征值.

特别地, 对 Phillips 模式, 假设旋转 Froude 数  $F_1, F_2$  相等, 值为  $F$  (相应地,  $d_1 = d_2$ ), 常数  $U_s = U_1 - U_2$  为上下层的速度切变, 则上面的判据具体为: 下面 3 个判据中的任何一个都是基流非线性稳定的充分条件

$$(a) U_s^2 = \frac{\beta^2}{F^2} \text{ 和 } \lambda^2 > 2F^2;$$

$$(b) U_s^2 < \frac{\beta^2}{F^2};$$

$$(c) U_s^2 > \frac{\beta^2}{F^2} \text{ 和}$$

$$(c_1) \lambda^2 > 4F^2 \text{ 或 } (c_2) 2F^2 < \lambda^2 < 4F^2, \text{ 且 } U_s^2 < \frac{4F^2 \beta^2}{\lambda^2(4F^2 - \lambda^2)}.$$

$$\text{令 } U_c^2 = \frac{4F^4}{\lambda^2(4F^2 - \lambda^2)} = \frac{4}{\left(\frac{\lambda}{F}\right)^2 \left(4 - \left(\frac{\lambda}{F}\right)^2\right)},$$

则 Phillips 模式的非线性稳定性特征如图 1 所示.

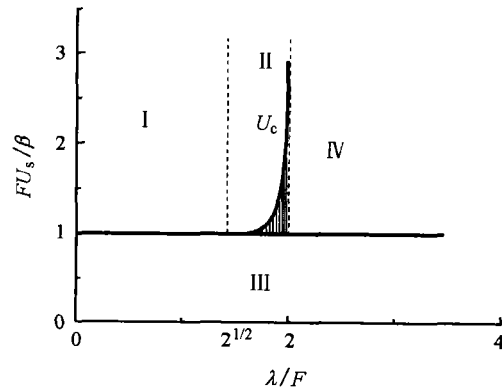


图 1 Phillips 模式的非线性稳定性特征

区域 I 和 II 可能是非线性不稳定的, 区域 III 既是 Arnol'd 第一定理稳定的也是 Arnol'd 第二定理稳定的, 区域 IV 仅是 Arnol'd 第二定理稳定的

## 2 叠加在不稳定基流之上的扰动的波动部分位涡拟能的上界估计

在这一节里, 我们研究 Phillips 模式中纯的斜压不稳定的非线性饱和问题.

考虑流  $(\Phi_i, P_i), i = 1, 2$ , 具有初始条件

$$\Phi_{i0} = \bar{\Phi}_{i0} + \Phi'_{i0}, \quad \bar{\Phi}_{i0} = -\bar{U}_s y.$$

这里“-”表示纬向平均，区域Ω同上节一样。根据上节的结果，当初始纬向平均流 $(\bar{\Phi}_{i0}, \bar{P}_{i0})$ 位于区域I和II时，它可能是非线性不稳定的。下面我们导出任意时刻流的波动部分 $\Phi'_i = \Phi_i - \bar{\Phi}_i$ 的位涡拟能 $Z_{\Phi'_i}$ 的上界估计。

### 2.1 区域I的情形

我们首先研究初始纬向平均流 $(\bar{\Phi}_{i0}, \bar{P}_{i0})$ 位于区域I的情形： $F\bar{U}_s/\beta > 1$ 。这里 $\bar{U}_s = \bar{U}_1 - \bar{U}_2$ 。令 $F\bar{U}_s/\beta = 1 + \epsilon$ ，其中 $\epsilon > 0$ 是超临界数。

仍然采用Shepherd的思想，把 $(\Phi_i, P_i)$ 分解成人工稳定基流 $(\Psi_i(y), Q_i(y))$ 和扰动 $(\psi_i(x, y, t), q_i(x, y, t))$ 。其中 $(\Psi_i(y), Q_i(y))$ 位于区域III，选取如下：

$$\Psi_i = -U_i y + \lambda_i, \quad FU_s/\beta = 1 - \delta.$$

其中， $U_i$ 是常数， $U_s = U_1 - U_2$ ， $0 < \delta \leq 1$ ， $\delta$ 是参数， $\lambda_i$ 是积分常数。为了方便，令 $\lambda_2 = 0$ ，这不影响最后结果。

由于

$$\Phi_i = \bar{\Phi}_i + \Phi'_i = \Psi_i + \psi_i = \Psi_i + \psi_i^* + \psi'_i, \quad (6)$$

其中 $\psi_i = \psi_i^* + \psi'_i$ 是按文献[8]中的方法分解的，因此

$$\psi'_i = \bar{\Phi}_i - \Psi_i - \psi_i^* + \Phi'_i. \quad (7)$$

因为 $\bar{\Phi}_i, \Psi_i, \psi_i^*$ 都只与 $y$ 有关，根据正交性有 $Z_{\Phi'_i} \leq Z'(t)$ 。结合(5)式，有

$$Z_{\Phi'_i} \leq \frac{[(E^*)^{1/2} + (E^* + \lambda k_1 H)^{1/2}]^2}{\lambda k_1^2}. \quad (8)$$

现在计算(8)式。先计算 $M$ 的最小正特征值 $k_1$ 。对Phillips模式(参见文献[8])，

$$k_1 = \frac{1}{2} (M_{11} + M_{22} - \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}^2}). \quad (9)$$

其中

$$M_{ii} = C_{1i} - \frac{\lambda + F}{\lambda(\lambda + 2F)}, \quad M_{12} = -\frac{F}{\lambda(\lambda + 2F)}.$$

$C_{11}, C_{12}$ 选取为

$$C_{11} = \frac{U_1 - \alpha}{\beta + FU_s}, \quad C_{12} = \frac{U_2 - \alpha}{\beta - FU_s}. \quad (10)$$

这里 $\alpha$ 是任意充分负的数(参见文献[8])。

令 $\alpha \rightarrow -\infty$ ，则

$$k_1 \sim \frac{-\alpha}{\beta + FU_s} \sim C_{11}. \quad (11)$$

由于

$$\begin{aligned} H &= E^* - E(0) - A(0) - C_{11}Z_1^* - C_{12}Z_2^* \\ &= E^* - E(0) + C_{11}Z_1'(0) + C_{12}Z_2'(0), \end{aligned} \quad (12)$$

注意到 $E^*, E(0)$ 和 $Z_i'(0)$ 都只与初始条件有关，人工稳定基流与 $\alpha$ 无关，令 $\alpha \rightarrow -\infty$ 。则(8)式简化为

$$Z_{\Phi'_i} \leq Z_1'(0) + \frac{\beta + FU_s}{\beta - FU_s} Z_2'(0) \triangleq Z_0. \quad (13)$$

利用初始条件可得

$$Z_0 = a\delta + \frac{b}{\delta} + c, \quad (14)$$

这里

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi\beta^2 l^3}{6}, \quad b = 2T_2 + \frac{\pi\beta^2 \epsilon^2 l^3}{6}, \\ c &= T_1 - T_2 + \frac{\pi\epsilon\beta^2 l^3}{3}, \end{aligned}$$

$$T_i = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\nabla^2 \Phi'_{i0} + (-1)^{i+1} F(\Phi'_{20} - \Phi'_{10})]^2 dx dy, \quad i = 1, 2.$$

且 $Z_0$ 与 $\lambda_1$ 无关。

由于 $Z_0$ 含有参数 $\delta$ ，我们需要寻找 $Z_0$ 关于 $\delta(0 < \delta \leq 1)$ 的极小值。容易证明：当

$$T_2 < \frac{\pi\beta^2 l^3}{12}, \quad \epsilon \leq \sqrt{1 - \frac{12T_2}{\pi\beta^2 l^3}} \quad (15)$$

时， $Z_0$ 有极小值

$$Z_{0m} = T_1 - T_2 + \frac{\pi\epsilon\beta^2 l^3}{3} \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{12T_2}{\pi\beta^2 \epsilon^2 l^3} \right)^{1/2} \right\}. \quad (16)$$

注意到  $Z_0$  在  $\delta = 1$  的值恰好是系统总的相对位涡拟能

$$Z_t = T_1 + T_2 + \frac{\pi\beta^2 l^3 (1 + \epsilon)^2}{6}, \quad (17)$$

所以  $Z_{0m} \leq Z_t$

如果  $\Phi'_{i0}$  是无穷小扰动, 即  $T_1 \rightarrow 0, T_2 \rightarrow 0$ , 则  $Z_{0m} = 2\pi\epsilon\beta^2 l^3 / 3$ . 因此, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $Z_{0m}$  也趋于零. 特别地, 对  $l = 1$  和  $\epsilon \leq 1$ , Shepherd 也得到此结果.

### 2.2 区域 II 的情形

现在我们研究  $(\bar{\Phi}_{i0}, \bar{P}_{i0})$  位于区域 II 的情形, 即

$$\frac{F\bar{U}_s}{\beta} > U_c, \quad \sqrt{2} < \frac{\lambda}{F} < 2. \quad (18)$$

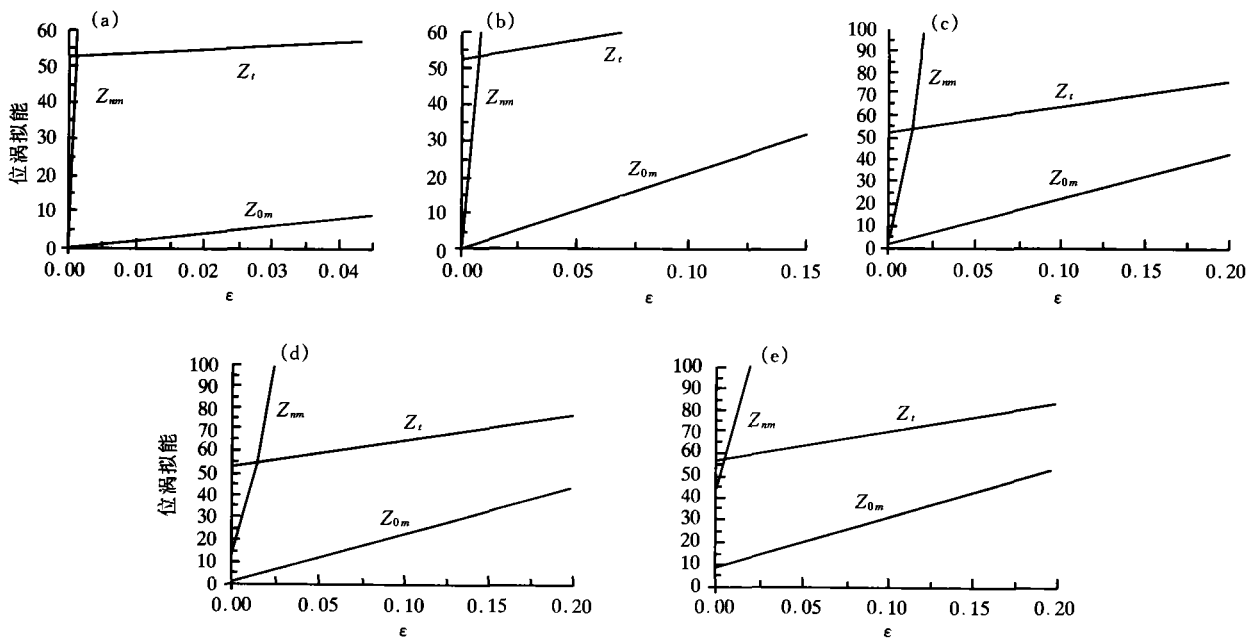


图2  $Z_{0m}, Z_{nm}$  和  $Z_t$  对超临界数  $\epsilon$  的依赖关系

$Z_{0m}, Z_{nm}$  分别是扰动位涡拟能的解析和数值上界估计,  $Z_t$  为总的相对位涡拟能. 有关参数为:  $d_1 = 1, l = 1, \beta = 10$ ,  $\Phi'_{10}$  和  $\Phi'_{20}$  为无穷小扰动. (a)  $\lambda/F = 1.42 (F \approx 6.95)$ ; (b)  $\lambda/F = 1.45 (F \approx 6.81)$ ; (c)  $\lambda/F = 1.48 (F \approx 6.67)$ ; (d)  $\lambda/F = 1.53 (F \approx 6.45)$ ; (e)  $\lambda/F = 1.6 (F \approx 6.17)$

(2)  $0 < \delta < 1 - 1/U_c$

那么

$$1 < \frac{FU_s}{\beta} < U_c, \quad \sqrt{2} < \frac{\lambda}{F} < 2. \quad (19)$$

这种情形 Shepherd 并没有考虑<sup>[1]</sup>. 为了方便, 令  $F\bar{U}_s/\beta = U_c (1 + \epsilon)$ , 其中  $\epsilon > 0$  是超临界数. 选择一族人工稳定基流  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$ , 满足

$$U_i = -\frac{d\Psi_i}{dy}, \quad \frac{FU_s}{\beta} = U_c(1 - \delta), \quad \sqrt{2} < \frac{\lambda}{F} < 2.$$

这里  $U_i$  是常数,  $U_s = U_1 - U_2, 0 < \delta \leq 1$  是参数. 分两种情形:

(1)  $1 - 1/U_c < \delta \leq 1$

那么  $0 \leq FU_s/\beta < 1$ . 因此,  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$  位于区域 III, 像 2.1 节一样处理, 所得扰动位涡拟能的最优上界仍用  $Z_{0m}$  表示.

图 2 (a)~(e) 显示  $Z_{0m}, Z_t$  随超临界数  $\epsilon$  的变化情况(对固定的  $\lambda/F$  和无穷小初始扰动  $\Phi'_{i0}$ ).

即  $(\Psi_i(y), Q_i(y))$  位于区域 IV 的阴影部分. 这时有

$$Z_{\Phi'} \leq \frac{[(E^*)^{1/2} + (E^* + \lambda k_1 H)^{1/2}]^2}{\lambda k_1^2} \triangleq Z_0. \quad (20)$$

由于 $(\Psi_i(y), Q_i(y))$ 位于区域IV, 常数 $\alpha$ 属于有限区间, 我们不能通过令 $\alpha \rightarrow -\infty$ 来简化上式. 由于 $Z_0$ 表达式的复杂性, 我们只能用数值方法关于 $\alpha, \delta$ 求 $Z_0$ 的极小值(用 $Z_{nm}$ 表示).

对无穷小初始扰动 $\Phi'_{i0}, l=1, \beta=10$ , 和固定的 $\lambda/F$ , 我们对 $\epsilon = 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-2}, 0.02, 0.03, \dots, 0.3$ 分别求 $Z_0$ 的极小值. 而 $\lambda/F$ 取值如下:  $\lambda/F = 1.42, 1.45, 1.48, 1.5, 1.53, 1.57, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$ . 结果如图2(a)~(e)所示. 从图上可以看出,  $Z_{nm}$ 的结果并不好. 在所有的情形,  $Z_{nm}$ 都大于解析上界估计 $Z_{0m}$ ; 对 $\lambda/F = 1.42, 1.45, \dots, 1.6$ , 都有一个小范围, 在其中,  $Z_{nm}$ 小于总的相对位涡拟能 $Z_t$ . 当 $\lambda/F$ 在1.53附近时, 这个区间接近最大, 大致是 $0 < \epsilon < 0.0125$ ; 当 $\lambda/F$ 趋向于1.42时, 这个区间有变小的趋势, 且 $Z_{nm}$ 趋向于 $Z_{0m}$ (当 $\epsilon$ 趋向于0时); 当 $\lambda/F$ 趋向于1.6时, 这个区间也变小, 但 $Z_{nm}$ 趋向于 $Z_t$ .

### 3 结论和讨论

利用Arnol'd第二稳定性定理, 本文研究了Phillips模式的斜压不稳定的非线性饱和问题, 得到了扰动的波动部分的位涡拟能的上界估计. 对于区域II来说, 解析结果比数值结果好.

从前面的过程可以看出, 常数 $\alpha$ 在讨论中起着关键的作用. 选择 $\alpha$ 相当于在 $x$ 方向考虑Galileo不变性. 而如何选择 $\alpha$ 则取决于基流本身的性质. 上述结果表明, 虽然条件(b)和(c)都是基流非线性稳定的充分条件, 但它们可能在本质上还是有差别. 这种差别有待于进一步研究.

在不稳定的非线性饱和问题的研究中, 边缘稳定曲线附近饱和上界的性质是一个令人感兴趣的问题. 从第2节可知, 如果初始纬向平均流 $(\bar{\Phi}_{i0}, \bar{P}_{i0})$ 位于区域I, 那么, 对无穷小初始扰动 $\Phi'_{i0}$ , 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 饱和上界 $Z_{0m}$ 也趋于零; 如果

$(\bar{\Phi}_{i0}, \bar{P}_{i0})$ 位于区域II, 那么, 即使 $\Phi'_{i0}$ 是无穷小的, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,  $Z_{0m}$ 和 $Z_{nm}$ 也不趋于零. 前者可用和Paret等<sup>[9]</sup>一样的方法解释, 后者可以解释如下: 如果选择人工稳定基流 $\Psi_i$ 在区域III, 那么即使 $\epsilon \rightarrow 0$ , 相对 $\Psi_i$ 的扰动 $\psi_i$ 也是一个有限振幅的扰动, 这决定了当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,  $Z_{0m}$ 并不趋于零; 如果人工稳定基流 $\Psi_i$ 在区域IV的阴影部分, 那么, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 扰动 $\psi_i$ 是无穷小的. 因此,

$$[(E^*)^{1/2} + (E^* + \lambda k_1 H)^{1/2}]^2 \sim (\epsilon + \delta)^2,$$

(当 $\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ ), 而 $k_1^2 \sim \delta^2$ , 所以,  $Z_{nm} \sim O(1)$ .

致谢 周则明博士提供了数值计算上的帮助.

### 参 考 文 献

- 1 Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part I: The two-layer model. *J Atmos Sci*, 1988a, 45: 2014
- 2 Shepherd T G. Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows. *J Fluid Mech*, 1988b, 196: 291
- 3 Zhu X, et al. Nonlinear saturation of baroclinic instability in two-layer models. *J Atmos Sci*, 1992, 49: 1961
- 4 Mu M, et al. On nonlinear symmetric stability and the nonlinear saturation of symmetric instability. *J Atmos Sci*, 1996, 53: 2918
- 5 Zeng Q C. Variational principle of instability of atmospheric motions. *Adv Atmos Sci*, 1989, 6: 137
- 6 Mu M. Nonlinear stability criteria for motions of multilayer quasigeostrophic flow. *Science in China, Ser B*, 1991, 34: 1516
- 7 Mu M, et al. Nonlinear stability of Eady's model. *J Atmos Sci*, 1994, 51: 3427
- 8 Mu M, et al. Nonlinear stability of multilayer quasigeostrophic flow. *J Fluid Mech*, 1994, 264: 165
- 9 Paret J, et al. Nonlinear saturation of baroclinic instability in a three-layer model. *J Atmos Sci*, 1996, 53: 2905
- 10 Xiang J, et al. Saturation of nonlinear instability of parallel shear flow. *Progress in Natural Science*, 1997, 7: 239
- 11 Mu M, et al. On the evolution of finite amplitude disturbances to the barotropic and baroclinic quasigeostrophic flows. *Adv Atmos Sci*, 1998, 5: 113